

# 平移不变的小波域近邻系数阈值 MR 图像去噪

程巧翠 高协平

(湘潭大学信息工程学院,湘潭 411105)

**摘要** 传统的小波域阈值去噪方法是根据每个小波系数各自的幅度大小进行相应的阈值修正,没有考虑到尺度间以及尺度内近邻的小波系数与当前小波系数的相关性,而使信号得不到更准确的估计。根据信号和噪声在尺度间的不同传播特性和尺度内近邻小波系数的相关性,设计出一种平移不变(TI)的近邻系数阈值策略,并依据磁共振成像(MRI)噪声图像的特点,结合复数域统一去噪方法,提出了一种新颖的基于平移不变的小波域近邻系数阈值 MR 图像去噪算法。实验表明该算法能更准确地估计信号,且与几种磁共振(MR)图像去噪算法相比具有更好的去噪效果。

**关键词** 磁共振 图像 去噪 平移不变 近邻系数阈值 复数统一

中图法分类号:TP391 文献标识码:A 文章编号:1006-8961(2009)07-1284-07

## MR Images Denoising Based on Neighboring-coefficients Thresholding in Wavelet-domain

CHENG Qiao-cui, GAO Xie-ping

(Information Engineering College, Xiangtan University, Xiangtan 411105)

**Abstract** In standard wavelet methods, the empirical wavelet coefficients are thresholded term by term, on the basis of their individual magnitudes. Information on other coefficients between the different scales and in the same scale has no influence on the treatment of particular coefficients, resulting in the lower accuracy of signal estimation. A translation-invariant (TI)neighboring-coefficients thresholding is designed by incorporating the different evolution of signal and noise along the scales of wavelet domain and information in the same scale. Considering the particularity of noise in magnetic resonance (MR) images, a novelty MR complex denoising algorithm based on TI neighboring-coefficients thresholding is developed by employing the complex entity method in MR complex images. The results of the simulated experiments show that the proposed algorithm has the higher accuracy of signal estimation, and outperforms previous MRI denoising methods about denoising capability.

**Keywords** magnetic resonance, images, denoising, translation-invariant, neighboring-coefficients thresholding, complex entity

## 1 引言

磁共振成像(MRI)是一种无创伤的能观察身体各组织解剖结构及能量代谢情况的成像方法,与CT,X线等成像相比,具有更高的病变组织和正常

组织的对比度。但是由于图像在获取过程中时间和技术上的限制,高分辨率的磁共振(MR)图像通常呈现出较大的噪声伪影,严重影响图像的质量,对图像的解释和医疗诊断带来不利因素,因此MRI后处理的去噪过程是提高图像质量的重要途径。MRI中用于视觉检测和计算机辅助分析的图像是重建后

基金项目:国家自然科学基金项目(60375021);湖南省杰出青年基金项目(05JJ10011)

收稿日期:2008-01-08;改回日期:2008-04-25

第一作者简介:程巧翠(1982~),女,2008年于湘潭大学获计算机软件与理论硕士学位。主要研究方向为小波分析与图像处理。

E-mail: chengqiaocui@sina.com

的幅度图像,其噪声并不是通常的 Gaussian 白噪声,而是呈现与信号相关的 Rician 分布。MRI 原始 K-空间数据被复数 Gaussian 噪声干扰,由于 Fourier 变换的正交性<sup>[1]</sup>,经离散 Fourier 逆变换之后,这些信号呈复数型且仍被复数 Gaussian 噪声干扰,即复数数据的实部和虚部的噪声分别呈现 Gaussian 分布,所以原始 K-空间的复数域去噪方法也成为此领域的研究热点。

在基于小波域降噪技术中,非线性阈值方法被认为是简单有效的。Donoho 的创新工作提出了一个通用阈值方法 VisuShrink<sup>[2]</sup>,即  $\tau = \sigma \sqrt{2 \log N}$ ,在极小极大化意义上是渐近最优的。其中  $\sigma$  是 Gaussian 白噪声的标准差, $N$  是采样长度,但是这个阈值通常会使得图像过度平滑,且阈值过程中没有考虑尺度内近邻系数之间的相关性,只是逐项地根据各自的幅度大小与阈值的关系来修正系数。事实表明在同一尺度内,如果近邻系数包含信号,那么当前系数也很可能包含信号,则在修正系数时应该降低衰减程度。由此 Cai 和 Silverman 提出了一种尺度内近邻系数的阈值策略<sup>[3]</sup>,但依然存在两个问题:一是其采用的正交小波变换不具有平移不变性(TI),导致重构后的图像出现 Gibbs 振荡现象;二是没有考虑不同尺度间近邻系数的相关性。基于以上两点分析,采用 TI 正交小波变换,重新设计近邻系数窗口,同时考虑不同尺度间和同一尺度内近邻系数的相关性,得到了一种新的近邻系数阈值策略。采用 Alexander 等人提出的复数统一体的方法<sup>[4]</sup>,结合改进的近邻系数阈值策略,提出一种新颖的基于平移不变的小波域 MR 图像复数去噪算法。仿真实验表明本文算法与 Cai 和 Silverman 的阈值策略相比能更准确地估计信号,且在视觉效果和数量分析上优于当前几种有效的 MR 图像去噪算法。

## 2 基础知识

### 2.1 TI 小波变换

小波变换去噪主要是对高频系数(小波系数)按照一定的规则进行修正从而估计真实信号,具有一定的光滑性和自适应性等特点,但是由于通常的小波变换不具有 TI 特性,当输入的信号有一个较小的位移时,将会导致不同尺度上小波系数较大的改变,造成重构后的图像在信号奇异点附近出现振荡

现象——Gibbs 效应。Coifman 和 Donoho 最先提出 TI 去噪算法来抑制此种现象<sup>[5]</sup>,其基本原理是将数据做一定范围内的平移,并对这些不同的平移数据分别降噪之后再反平移,最后将所有反平移的结果求平均以得到去噪后的估计数据。此种算法通过改变信号的排列次序,显著地消除了与信号位置相关的干扰条纹。同时 Coifman 和 Donoho 指出 TI 去噪算法的时间复杂度是  $N \log_2 N$ ,也就是说等价于非抽取小波变换的时间复杂度。

为方便起见,仅以 1 维信号  $S$  为例简要介绍 TI 小波去噪的分解和重构过程。令  $A_{j,k}$  和  $D_{j,k}$  分别对应信号  $S$  在小波域的低频(尺度系数)和高频成分(小波系数),下标  $j$  表示小波分解级数, $k$  表示循环平移的位数;令  $G$  和  $H$  分别表示下采样高通和低通算子, $\tilde{G}$  和  $\tilde{H}$  分别表示上采样高通和低通算子; $T_h$  表示循环平移  $h$  位;设  $A_{0,0} = S$ 。则有如下递归分解公式:

$$\begin{aligned} D_{j+1,2k} &= GT_0 A_{j,k}; D_{j+1,2k+1} = GT_1 A_{j,k} \\ A_{j+1,2k} &= HT_0 A_{j,k}; A_{j+1,2k+1} = HT_1 A_{j,k} \end{aligned}$$

和递归重构公式:

$$\begin{aligned} \gamma_{j-1,k} &= T_0(\tilde{G} A_{j,2k} + \tilde{H} D_{j,2k}) \\ \rho_{j-1,k} &= T_{-1}(\tilde{G} A_{j,2k+1} + \tilde{H} D_{j,2k+1}) \\ A_{j-1,k} &= (\gamma_{j-1,k} + \rho_{j-1,k})/2 \end{aligned}$$

其中, $j=0, \dots, J, J \leq \log_2 N - 1, k=0, \dots, 2^{j-1} - 1, T_{-1}$  表示反平移一位。为直观起见,图 1 展示了对 1 维信号  $S$  的 TI 小波分解的结构图,其中假定每次平移的步长为 1。如果采用阈值衰减方法修正系数达到去噪的目的,则应对所有平移的系数都做阈值修正然后反平移,再重构求平均之后的数据。

对于 2 维图像来说,数据的平移要考虑水平和垂直两个方向,即  $S_h \in \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}, \bar{S}_h$  表示其相应的反平移, $a_{0,0}$  表示原始的图像信号,那么就得到了 2 维情况下的分解公式:

$$a_{j+1,2k+S_h} = HH * S_h a_{j,k} \quad (1)$$

$$h_{j+1,2k+S_h} = GH * S_h a_{j,k} \quad (2)$$

$$v_{j+1,2k+S_h} = HG * S_h a_{j,k} \quad (3)$$

$$d_{j+1,2k+S_h} = GG * S_h a_{j,k} \quad (4)$$

式中,\* 表示卷积操作, $a, h, v$  和  $d$  分别表示低频系数,以及水平方向、垂直方向和斜对角方向的高频系数。重构公式为

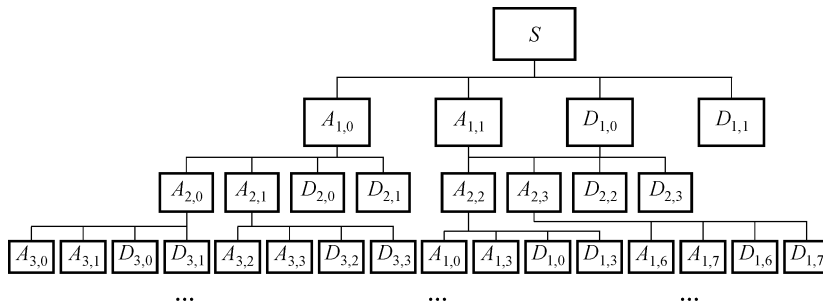


图 1 TI 小波 3 级分解示意图

Fig. 1 TI wavelet three-level decomposition

$$\eta_{j-1,k}^{S_h} = \bar{S}_h \left( \tilde{H} \tilde{H} * a_{j,2k+S_h} + \tilde{G} \tilde{H} * h_{j,2k+S_h} + \tilde{H} \tilde{G} * v_{j,2k+S_h} + \tilde{G} \tilde{G} * d_{j,2k+S_h} \right) \quad (5)$$

$$a_{j-1,k} = 1/4 \sum_{S_h} \eta_{j-1,k}^{S_h} \quad (6)$$

## 2.2 MRI 复数图像的噪声抑制

在 MRI 的原始 K-空间中,原始数据为复数型,实部和虚部均服从 Gaussian 分布。MRI 的原始数据在 Fourier 逆变换后的数学模型被视为一个 2 维的复数观测集。令  $y(m, n)$  为采集到的这个 2 维观测集:

$$y(m, n) = y_{\text{re}}(m, n) + iy_{\text{im}}(m, n)$$

式中,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $y_{\text{re}}$  和  $y_{\text{im}}$  分别表示数据的实部和虚部,所含噪声均服从 Gaussian 分布,其标准差分别为  $\sigma_{\text{re}}$ ,  $\sigma_{\text{im}}$ 。因而  $y(m, n)$  又可写为

$$y(m, n) = f(m, n) + \varepsilon(m, n)$$

式中,  $f(m, n)$  是未被干扰的理想信号,也是去噪算法所要恢复的信号。 $\varepsilon(m, n)$  是一个复数 Gaussian 白噪声。因为复数图像的实部  $y_{\text{re}}$  和虚部  $y_{\text{im}}$  的噪声均为不相关的 0 均值 Gaussian 噪声,现有的各种去噪方法<sup>[2,5-8]</sup>都是针对此种噪声,因此原始 K-空间的复数域去噪方法也成为此领域的研究热点。Zaroubi 等人已经证明复数域方法与 Nowak 提出的幅度方法<sup>[9]</sup>相比,不仅性能优越,而且所需的计算代价也相对较小<sup>[10]</sup>。Wood 和 Johnson<sup>[11]</sup>以及 Bao 和 Zhang<sup>[12]</sup>分别采用小波包和小波域自适应多尺度积阈值方法对 MR 信号的实部和虚部分别降噪,保留了更多的边缘信息。最近,Wirestam 等人针对 MR 图像中复数数据类型设计了一种类似维纳滤波方法<sup>[13]</sup>,用于实部和虚部的分别降噪,仿真和实验数据展示了很好的噪声抑制效果。然而这些方法的

缺点在于系数的相位和振幅在阈值处理时将同时被修改,使得幅值重构后可能引入严重的相位失真,导致了不能避免的噪声伪影现象。避免相位失真的一个有效方法就是将复数信号的实部和虚部成分看作一个单一的复数统一体,而非对实虚两部分独立地进行降噪。基于 Alexander 等人<sup>[4]</sup>的这一思想,本文将复数图像看作一个整体变换到小波域得到复数型系数,再进行阈值滤波来抑制相应的复数 Gaussian 噪声。

## 2.3 近邻系数阈值策略

非线性衰减模型:  $y_i = f(t_i) + \sigma z_i$ , 其中  $t_i = i/N$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $z_i$  是  $N(0, 1)$  独立同分布 (i. i. d), 函数  $f(\cdot)$  是感兴趣待估计的信号。

在基于小波域降噪技术中,非线性阈值方法是简单有效的。通常的做法是把单个小波系数一项一项地与事先设定的阈值进行比较以确定此系数的衰减量。由此,Donoho 提出了一个通用阈值选取方法 VisuShrink, 即  $\tau = \sigma \sqrt{2 \log N}$ , 在极小极大化意义上是渐近最优的,然后采用硬阈值 (hard-thresholding) 或软阈值 (soft-thresholding) 策略衰减小波系数,有效地抑制了噪声,但是硬阈值方法容易出现振铃等视觉失真,软阈值过度平滑可能造成边缘模糊现象,且没有考虑不同尺度间和同一尺度内近邻系数对当前系数的相关性影响。

由于小波变换的压缩特性和空域局部特性,信号的相关信息包含在少数相对幅度较大的小波系数中,图 2 展示了 Bumps 测试函数的小波系数<sup>[12]</sup>,从图中可以看出幅度较大的小波系数都是成群地出现在函数变化比较明显的区域,也就是说如果一个系数的近邻区域内的小波系数包含了信号,那么这个系数也很可能包含信号,所以应该用一个较小的阈值进行衰减。为了提高信号估计的准确性,Cai 和

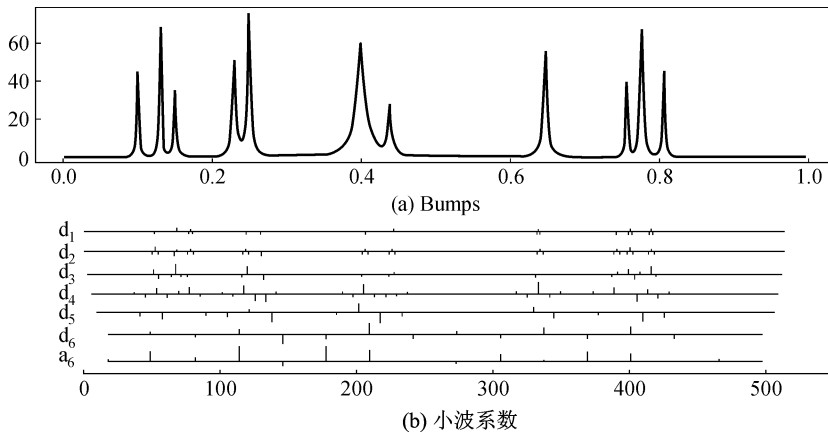


图 2 Bumps 函数以及 6 级分解的小波系数

Fig. 2 Bumps function and its wavelet coefficients of the 6-level decomposition

Silverman 根据这一尺度内小波系数的相关性设计了一种近邻系数阈值方法, 其中参数的设置实际上是对 Donoho 的通用阈值策略的改进, 其实验表明此种阈值方法去噪性能优于 Donoho 提出的通用阈值、SureShrink 阈值<sup>[6]</sup>和 TI 去噪<sup>[5]</sup>。

Mallat<sup>[14]</sup>的分析表明, 一般的连续函数具有一致的 Lipschitz 指数  $\alpha > 0$ , 而白噪声的为  $-1/2$ , 由此得出信号和 Gaussian 白噪声在小波域不同尺度间的传播特性是不同的。Meyer 的研究<sup>[15]</sup>表明如果一

个函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上具有一致的 Lipschitz 指数  $\alpha (0 < \alpha < 1)$ , 当且仅当存在一个常数  $K > 0$  对于所有的  $x \in [a, b]$ , 其小波变换满足:

$$|W_j f(x)| \leq K(2^j)^\alpha$$

即对于具有正值  $\alpha$  的连续函数来说, 其小波变换的幅度随着尺度的增大而加大, 而白噪声由于其  $\alpha$  值为负, 将随着尺度的增大而明显减小。图 3 展示了信号与噪声沿着尺度的传播特点<sup>[3]</sup>。

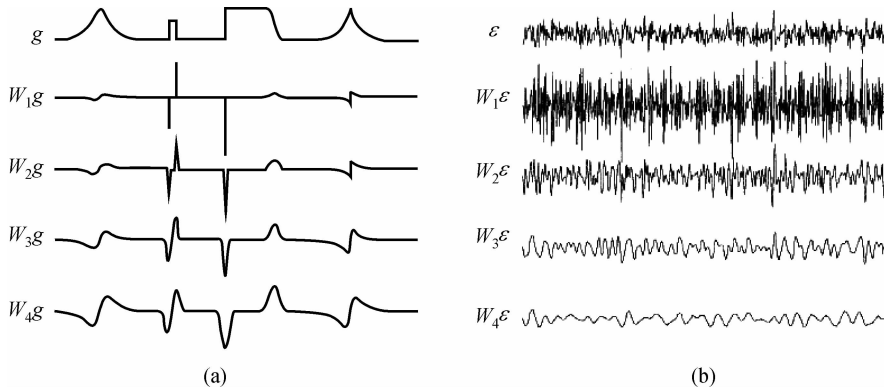


图 3 信号和噪声在不同尺度间的传播特点

Fig. 3 The different evolution of signal and noise along the scales

上述分析表明, 小波变换尺度间的小波系数也有一定的相关性, 基于这一事实改进了 Cai 和 Silverman 的近邻系数阈值方法, 首先采用 TI 小波变换抑制 Gibbs 振荡现象, 然后在垂直方向(小波域尺度间)扩大近邻系数窗口, 使之包含尺度间的最近邻系数, 窗口设计如图 4(b) 所示。对于 MR 图像复数域来说阈值策略设计如下:

$$\hat{y}_{j,k} = \beta_i^j \tilde{y}_{j,k}$$

衰减因子  $\beta_i^j$  依据窗口内的小波系数确定。

$$\beta_i^j = (1 - 2\sigma^2 \log N / \theta_{ji}^2)_+ = (1 - \tau^2 / \theta_{ji}^2)_+ \quad (7)$$

式中,  $\theta_{ji}^2 = \sum |\tilde{y}_{j,k}|^2$ ,  $\tau$  是 Donoho 提出的通用阈值,  $\tilde{y}_{j,k}(j, k) \in W_i^j$  为复数小波系数。即在每一个  $3 \times 3$  的正方形窗口内, 如果窗口内最近邻的不同尺度和同一尺度上的所有小波系数模的平方和小于  $\tau^2$ , 那么就认定当前系数(窗口中心系数)是噪声系数, 幅度衰减为 0; 如果大于  $\tau^2$ , 则认为当前系数包

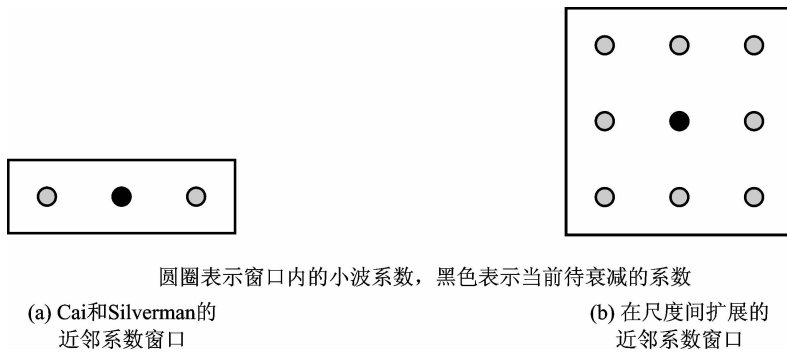


图 4 近邻系数窗口示意图

Fig. 4 Schematic diagram of neighboring-coefficients windows

含信号,则按照一定比例衰减幅度。

公式(7)中噪声方差  $\sigma$  的估计,是通过把复数小波系数看作一个统一体,采用 Donoho 等人提出的绝对值中值法获取,计算公式为

$$\sigma = \text{median}(|wc|)/0.6745$$

其中  $wc$  是一级分解后得到的高频复数数据向量。

## 2.4 算法描述

下面的过程描述了提出的基于平移不变的小波域近邻系数 MR 图像复数域去噪的过程:

- (1)根据式(1)~(4)对 MR 复数域数据做 TI 正交小波分解;
- (2)对所有平移后的复数小波系数按照式(7)的阈值策略进行衰减;
- (3)根据式(5)、式(6)重构反平移求平均后的所有修正后的小波系数;
- (4)把复数域图像变换回可视化的幅度图像。

## 3 实验仿真和比较

### 3.1 仿真图像

根据 MRI 的成像原理,可以将原始数据做 Fourier 逆变换来构造一幅复数图像。但是在通常情况下,MR 数据的用户很难得到原始的 K-空间图像,而只能得到重构以后的幅度图像。由于相位信息的无法获取,难于将幅度图像变换回 K-空间。解决这个问题的唯一途径就是人为地设置相位信息来复数化幅度图像。这样,就需要一幅完全不受干扰的仿真图像,将其变换到复数 Fourier 频域空间,添加不同方差的复数 Gaussian 噪声,以生成含噪的 K-空间图像。再对该图像进行 Fourier 逆变换,得到去噪算法所需的复数图像。

### 3.2 实验结果及分析

将 MR 复数图像的实部和虚部看作统一体,采

用第 2 节设计的算法进行噪声衰减,然后将去噪后的复数数据取模得到最终的可视化幅度图像。评估参数采用峰值信噪比 (PSNR) 和根均方误差 (RMSE),两者的定义分别为

$$\text{PSNR} = 10 \log_{10} (255/\text{RMSE})^2 \text{ dB}$$

$$\text{RMSE} = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \hat{y}_{ij})^2}$$

式中,  $y_{ij}$  是无噪信号,  $\hat{y}_{ij}$  是最终估计的无噪信号。

为了更全面地分析本文设计的算法,实验中参与比较的方法有: Bao 和 Zhang 两人提出的自适应多尺度积阈值方法<sup>[12]</sup>,对 MR 复数数据的实部和虚部分别去噪; Alexander 等人提出的基于复数统一体的小波域 Wiener 滤波方法<sup>[4]</sup>; Wirestam 等人设计的一种小波域类似 Wiener 滤波技术,用于 MR 复数数据中实部和虚部的分别去噪<sup>[13]</sup>; Cai 和 Silverman 提出的近邻系数阈值方法<sup>[3]</sup>。为书写方便这些方法依次简称为: AMPT、WWF 和 NC,本文算法简称为 TINC,选取了大量的小波进行仿真实验,综合比较后,发现正交小波 DB3 是去噪效果最好的,因此,本文选用 DB3 TI 小波变换。

大量实验表明,本文方法在添加各种强度的噪声情况下均获得了最佳的视觉效果和最优的定量分析结果。其中的 10 幅 MR 幅度图像如图 5 所示,图 6 展示了 10 幅图像添加不同水平的噪声后,采用本文算法和参与比较的 3 类方法分别去噪后得到的 PSNR 曲线,表 1 记录了在噪声水平  $\sigma = 30 \text{ dB}$  下,MR 图像降噪之后 PSNR 和 RMSE 的具体数值。从图 6 和表 1 中,可以看出本文算法 TINC 与算法 NC 相比,在很大程度上降低了去噪后图像的 RMSE 值,具有更高的 PSNR 值,且去噪性能略优于同样采用复数统一体方法的 WWF,明显优于复数图像实部和虚部数据分别降噪的 AMPT 方法。

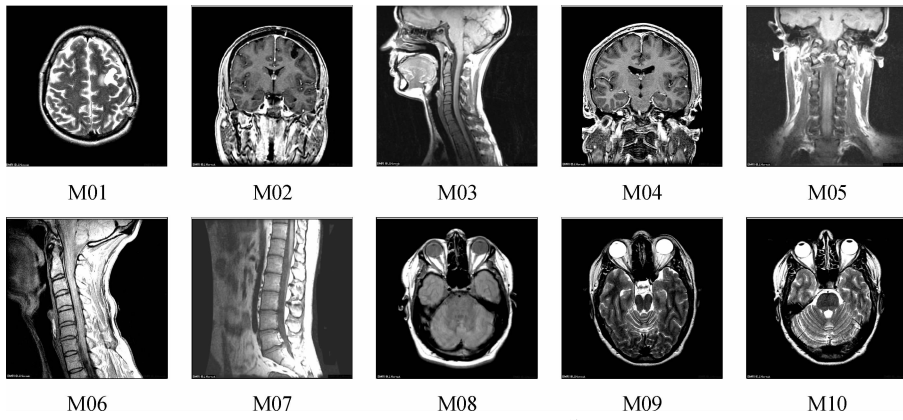


图 5 10 幅 MR 幅度图像

Fig. 5 The ten MR images

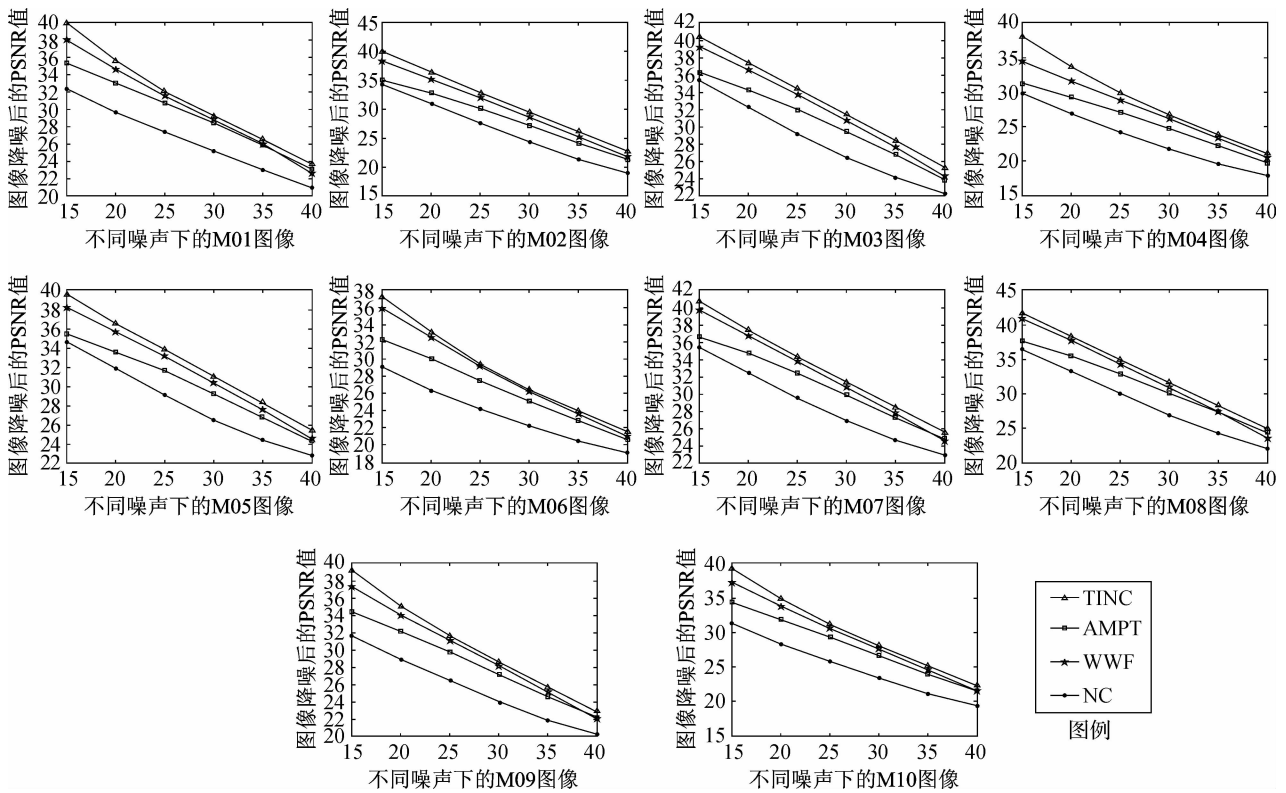


图 6 10 幅 MR 图像在不同噪声水平下四种算法降噪后得到的 PSNR 曲线示意图

Fig. 6 The PSNR (dB) lines of denoised ten MR images by four denoising methods under various noise levels

表 1 MR 图像在噪声水平  $\sigma = 30$  dB 下的 PSNR 和 RMSE 值

Tab. 2 Results of PSNR and RMSE under noise level  $\sigma = 30$  dB

	TINC		AMPT		WWF		NC	
	PSNR	RMSE	PSNR	RMSE	PSNR	RMSE	PSNR	RMSE
M01	29.179 3	8.862 9	28.422 2	9.670 1	28.843 3	9.212 4	25.213 3	13.991 0
M02	29.490 4	8.551 0	27.151 4	11.193 6	28.656 9	9.412 3	24.359 4	15.437 2
M03	31.433 4	6.837 1	29.409 8	8.630 8	30.717 7	7.424 3	26.447 2	12.139 0
M04	26.773 0	11.692 0	24.708 2	14.829 6	26.172 4	12.529 1	21.789 7	20.751 8
M05	31.003 3	7.184 1	29.200 7	8.841 1	30.315 6	7.776 1	26.435 1	12.155 9
M06	26.417 8	12.180 8	25.145 7	14.101 2	26.290 1	12.360 5	22.237 4	19.709 3
M07	31.293 9	6.947 8	29.820 9	8.231 8	30.746 0	7.400 1	26.797 9	11.658 6
M08	31.674 6	6.649 8	30.072 9	7.996 4	30.875 7	7.290 4	26.836 1	11.607 4
M09	28.539 1	9.540 8	27.099 2	11.261 1	28.109 7	10.024 3	23.920 9	16.236 7
M10	28.085 7	10.052 0	26.646 3	11.863 9	27.641 2	10.579 8	23.339 5	17.360 6

## 4 结 论

本文讨论了小波域内不同尺度间和同一尺度上近邻小波系数之间的相关性,并把这些信息作为阈值衰减的重要参考,更准确地估计无噪信号,结合 TI 小波变换平移不变性,有效地抑制 Gibbs 现象,提高了图像的视觉效果。MR 图像的复数域统一体降噪方法能够避免复数域实部和虚部分别处理引入的相位和振幅失真,实验表明提出的算法能够很好地抑制 MR 图像的噪声,提高图像的质量。

### 参考文献 (References)

- 1 Sijbers J, Den Dekker A J, Van Audekerke J, *et al.* Estimation of the noise in magnitude MR images [J]. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 1998, **16**(1): 87-90.
- 2 Donoho D L, Johnstone I M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage [J]. *Biometrika*, 1994, **81**: 425-455.
- 3 Cai T Tony, Silverman Bernard W. Incorporating information on neighbouring coefficients into wavelet estimation [J]. *Sankhya; The Indian Journal of Statistics*, 2001, **63**(2):127-148.
- 4 Alexander M E, Baumgartner R, Summers A R, *et al.* A wavelet-based method for improving signal-to-noise ratio and contrast in MR images [J]. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 2000, **18**(2): 169-180.
- 5 Coifman R R, Donoho D L. Translation-invariant de-noising [A]. In: *Proceedings of Springer Lecture Notes in Statistics [C]*, New York: Springer-Verlag Press, 1995:125-150.
- 6 Donoho D L, Johnstone I M. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage [J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1995, **90**(12):1200-1224.
- 7 Pan Quan, Zhang Lei, Dai Guan-zhong, *et al.* Two denoising methods by wavelet transform [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1999, **47**(12): 3401-3406.
- 8 Chang S G, Yu Bin, Vetterli Martin. Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compressing [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2000, **9**(9): 1532-1546.
- 9 Nowak R D. Wavelet-based Rician noise removal for magnetic resonance imaging [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1999, **8**(10):1408-1419.
- 10 Zaroubi S, Goelman G. Complex denoising of MR data wavelet analysis: application for functional MRI [J]. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 2000, **18**(1):59-68.
- 11 Wood J C, Johnson K. Wavelet packet de-noising of the magnetic resonance images: Importance of Rician noise at low SNR [J]. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 1999, **41**(3):631-635.
- 12 Bao Paul, Zhang Lei. Noise reduction for magnetic resonance images via adaptive multiscale products thresholding [J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2003, **22**(9):1089-1099.
- 13 Wierstam Ronnie, Bibic Adnan, Latt Jimmy, *et al.* Denoising of complex MRI data by wavelet-domain filtering: Application to high-b-value diffusion-weighted imaging [J]. *Magnetic Resonance in Medicine*, 2006, **56**(5):1114-1120.
- 14 Mallat S, Hwang W L. Singularity detection and processing with wavelets [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1992, **38**(2):617-643.
- 15 Meyer Y. *Wavelet and Operators [M]*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1992.